Programação Linear

Trabalho Teórico / Prático número 1

Lucas Mateus Fernandes

*Abstract*—This work intends to explore a mathematical model that aims to maximize the profit of a joiner having as main tool the linear programming and the resolution through the simplex, simplex 2 phases and graphical method

Keywords—graphical***, 2 phases, linear, simplex***

# Resumo

Este trabalho pretende explorar um modelo matematico que viza maximizar o lucro de um marceneiro tendo como principal ferramenta a programação linear e a resolução por meio do simplex, simplex 2 fases e método grafico.

# Introdução

Devido a pandemia um marceneiro resolver restruturar sua metrica de produção afim de conseguir extrar o maior lucro possível com as limitações decorrentes da própria pandemia.

# Restrições da Pandemia

Com decorrencia da pandemia e uma possível crise economica o marceneiro optou por tomar uma atitude mais conservadora em seus gastos, não ter mais do que 1 funcionários, não ter mais do que R$5000 de material em estoque, não trabalhar mais do que 8 horas por dia por um prazo de 30 dias

IV. Restrições de Maquinario

Cada funcionario agiliza o processo de produção em 20% porem devido a quantidade de maquinário os funcionário nem sempre trabalham em paralelo ou seja há um limite de 50% no que os funcionarios podem agilizar pois caso tenha muito funcionários gera um gargalo no processo devido a limitação de maquinario o que acaba gerando funcionarios ociosos.

V. Design

Os moveis são separados em modulos e para a construção de um movel algumas regras devem ser seguidas: Obrigatoriamente um movel tem que ter 1 modulo de gaveta e 1 modulo de porta; Cada modulo de gaveta tem que ser composto por X Gavetas sendo 2<=X<=4.Obrigatoriamente um modulo deve ser classificado somente como um tipo, ou modulo de gaveta ou modulo de porta.

# VI. Custo

Os materiais e o custo por funcionário são fixos, cada funcionário tem um custo de R$ 1.345 mensais; cada peça de mdf tem um custo de R$230; o custo de transporte do movel até a casa do cliente é de R$50; o puxador da porta tem um custo fixo de R$30; o puxador da gaveta tem um custo fixo de R$15.

Para a construção de cada gaveta é necessário:1 hora de trabalho; 1 puxador de gaveta; 1/12 de uma peça de mdf;

O custo de uma gaveta é dada pela função custoGaveta definida como:

*custoGaveta( c1, c2, c3) : c1 + c2 \* c3*

* *c1 = Custo do puxador da gaveta*
* *c2 = Custo do Mdf*
* *c3 = Porcentagem de um mdf usado para confecção de uma gaveta*

Para a construção de uma porta é necessário: 1 hora de trabalho; 1 puxador de porta; 1/3 de uma peça de mdf;

O custo de uma porta é dada pela função custoPorta definida como:

*custoPorta( c1, c2, c3) : c1 + c2 \* c3*

* *c1 = Custo do puxador da porta*
* *c2 = Custo do Mdf*
* *c3 = Porcentagem de um mdf usado para confecção de uma porta*

Portanto o custo de um modulo é proporcional a quantidade de gavetas e portas que pode ser calculado pela formula:

*custoModulo(c1,c2,c3,c4): c1 \* c2 + c3 \* c4*

* *c1 = quantidade de gavetas em um modulo*
* *c2 = custo por gaveta*
* *c3 = quantidade de portas em um modulo*
* *c4 = custo por porta*

A constante que define o custo de uma gaveta é 34,17 que equivale a *custoGaveta(15,230,1/12)* e o custo de uma porta é 106,67 que equivale a *custaPorta(30,230,1/3)*

Uma porta rende um lucro equivalente a 80% do material gasto e a gaveta rende 90% do material gasto, portanto o custo de uma gaveta ou porta pode ser dado pela pela função:

lucroUnitario(c1,c2): c1 \* c2

* *c1 = Custo de uma gaveta ou porta*
* *c2 = Porcentagem de lucro em cima do material gasto*

A constante que define o lucro de uma gaveta é 27,34 que equivale a *lucroUnitario(34.17, 0.8)* e o lucro de uma porta é 96,01 que equivale a *lucroUnitario(106,67, 0.9)*

VII. Variaveis Basicas

As variaveis basicas são:

* x1 = quantidade de modulo com 2 Gavetas
* x2 = quantidade de modulo com 3 Gavetas
* x3 = quantidade de modulo com 4 Gavetas
* x4 = quantidade de modulo com 1 porta
* x5 = quantidade de funcionarios

Devido a natureza do problema que é incoerente com algumas restrições e o range de quantidade de funcionários é extremamente limitante seŕa feito o uso de uma constante,ou seja, em cada instância será rodada 4 vezes com x5 recebendo um valor fixo que pode ser um inteiro dentro do range [0,3]

VIII. Modelagem

A função objetiva é a maximização do lucro que é a relação de um modulo e a quantidade de gavetas ou portas associado ao lucro de cada unidade menos o custo de cada funcionario e o custo gasto em transporte dos moveis, que pode ser definida como:

*(29,68\*x1)+(57,02\*x2)+(84,36\*x3)+(71,01\*x4)-(1345\*x5)*

A restriçã de tempo é associação de quanto uma determinada quantidade de funcionario pode agilizar o processo, que pode ser definida como:

0.2\*x5 <= 0.50

A restrição de material é o somatorio do valor gasto pela construção de cada modulo definida como:

*68,34\*x1+102,51\*x2+136,68\*x3+106,67\*x4 <=5000*

A restrição de construção de um movel é a bijeção de modulos de gaveta para com modulos de porta que pode ser definida como:

x1+x2+x3-x4 = 0

Há outra restrição de tempo associada ao limite de produção mensal definida como:

*(x1+x2+x3+x4)\*(1+(0.2\*x5))<= 240*

IX. Instancias

O que aconteceria se:

* O salario do funcionário fosse R$250
* Não houvesse custo de transporte
* Não houvesse a possibilidade de ter funcionarios qual seria a menor porcentagem de lucro que uma porta tem que ter para que seja mais lucrativo ter uma maior quantidade de moveis.
* Não houvesse limite de estoque
* O marceneiro fizesse um emprestimo de R$500000 e comprasse um maquinario que possibilitasse gastar metade do tempo na produção de cada movel e consequentemente o limite de estoque seria R$450000 o marceneiro conseguiria quitar o financiamento em um prazo de 1 ano ?
* O marceneiro não trabalhasse mais com modulos e sim com moveis onde cada movel teria um custo de R$150 e um lucro de R$250 com um tempo de construção de 1hora e 30minutos, e tercerizasse o processo a ponto de não pagar um salario mensal para o funcionário e sim tercerizar a produção de modo que tenha como custo 30% do lucro unitário, porem cada produto tercerizado tem um custo temporal de 2 horas e 15 minutos, que é o tempo de fazer o pedido, Buscar até na distribuidora, fazer o acabamento, e remontar o movel. Por não ter tanto trabalho vendeu algumas maquinas a ponto de conseguir ter R$15000 reais de caixa no primeiro mês.
* Pensando na ultima instância, no próximo mês o marceneiro não terá os R$15000 proveniente da venda das maquinas inutilizadas, o que aconteceria se o valor de caixa estivesse limitado a R$10000

X. Resultados

A instância original e as isntancias de 1 a 5 estão resolvidas no arquivo em anexo do jupyter notebook denominado de Anexo III.

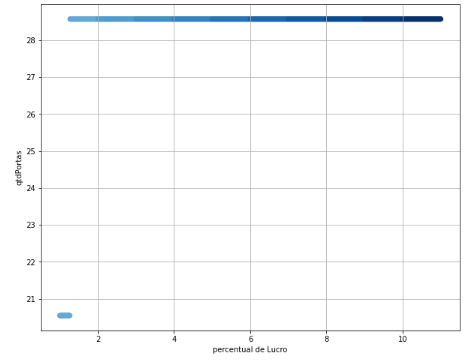
Devido a natureça do problema, após a solução os valores são truncados e há um recalculado da função objetiva com os novos valores truncados

Instancia original: teve como lucro máximo R$3107.4 levando em consideração a construção de 20 modulos de 3 gavetas e 20 modulos de porta e nenhuma funcionário.

1º instância adaptada:teve como lucro máximo R$3107.4 levando em consideração a cosntrução de 20 modulos de 3 gavetas e 20 modulos de porta, ou seja, a quantidade de funcionários não intefere no problema pois não é uma restrição ativa.

2º instância adaptada:teve como lucro máximo R$4219.32 levando em consideração a construção de 28 modulos de 1 gavetas e 28 modulos de porta, ou seja, a o valor do frete intefere no problema mesmo não sendo uma restrição ativa.

3º instância adaptada mostrou que a menor porcentagem de lucro que uma porta tem que ter para que seja mais lucrativo ter uma maior quantidade de moveis, é quando o lucro de uma porta equivale a 127% de seu custo.

4º instância adaptada teve como lucro maximo R$26157.00 levando em consideração a construção de 300 modulos de 1 gavetas e 300 modulos de porta e 3 funcionários.

5º instância adaptada teve como lucro ao longo de um ano R$284579.13 levando em consideração a construção de 1849 modulos de 3 gavetas e 1849 modulos de porta e 2 funcionários.

6º instância adaptada teve uma mudança significativa na modelagem ficando da seguinte forma:

x1 = quantidade de moveis feitos

x2 = quantidade de moveis tercerizados

*max z = 250\*x1+175x2 - 50\*(x1+x2)*

*sujeito a:*

*Restrição de tempo dispoinivel mensalmente em minutos*

*90\*x1+135\*x2 <= 14400*

*Retrição de dinheiro disponivel mensalmente*

*150\*x1 + 75\*x2 <= 15000*

6º instância adaptada foi resolvida por metodo gráfico manualmente que pode ser visto no ‘Anexo I’ tendo como valor de x1=70 x2 = 60 e lucro maximo de R$21500

7º instância adaptada foi resolvida por metodo simplex manualmente que pode ser visto no ‘Anexo II’ onde x1=20 x2=93 já com os valores truncados e recalculando a função objetiva com os valores truncados chegamos no valor do lucro máximo igual a R$15625,00 .

XI. Conclusões

1º instância adaptada interferiu no problema porem não interferiu na solução otima ou seja não era uma restrição ativa pois de acordo com os benefícios que um funcionário oferece e suas despesas, não é viavel ter um funcionário.

2º instância adaptada interferiu diretamente no problema mesmo não sendo aplicada na restrição e sim na função objetiva pois o custo do frete penalizava a construção de modulos de 1 gaveta ou seja quanto menos gavetas mais o modulo era penalizado pelo frete.

4º instância adaptada interferiu diretamente no problema e fez com que a restrição de funcionário associada com o tempo se tornasse uma restrição ativa.

5º instância adaptada mostrou que o emprestimo não seria uma opção factivel pois não conseguiria pagar o financiamento ao longo de um ano, porem foi possível perceber que no caso da isntancia teve um padrão diferente das demais isntância onde o modulo de portas não esteve tendencioso a apena um tipo de modulo, tal instância com 1 funcionário teve como lucro máximo R$283384.76 fazendo 224 modulos de 1 gaveta 1687 modulos de 3 porta e 1912 modulos de 1 porta.

6º instância adaptada teve uma mudança significativa na modelagem que permitiu que o problema fosse resolvido via metodo gráfico devido a limitação de apenas duas variaveis básicas.

7º instância adaptada foi uma continuação da 6º de modo que facilitasse o desenvolvimento do método simplex, mas cabe ressaltar que a quantidade de variaveis não é um limitade de tal metodo porem utilizar tal método só foi possível pois todas restrições eram de ‘<=’.

Anexo I

Resolução da 6º instância foi feita pelo método grafico seguindos os seguintes passos:

1º passo é converter as restrições de desigualdade em restrições de igualdade:

*90\*x1+135\*x2 = 14400*

*150\*x1 + 75\*x2 =15000*

2º passo é determinar os pontos A, A’ referentes a primeira restrição e os pontosC, C’ referentes a segudna restrição:

Ponto A:

x1 = 0

*90\*0+135\*x2 = 14400*

*135\*x2 = 14400*

*x2 = 14400/135*

*x2 = 106,66666666...*

*x2 =* 960/9

A = (0, 960/9)

Ponto A”:

x2 = 0

*90\*x1+135\*0 = 14400*

*90\*x1= 14400*

*x1= 14400/90*

*x1= 14400/90*

*x1 = 160*

A = (160,0)

Ponto C:

x1 = 0

*150\*0 + 75\*x2 = 15000*

*75\*x2 = 15000*

*x2 = 15000/75*

*x2 = 200*

*C = (0,200)*

Ponto C’:

x2 = 0

*150\*x1 + 75\*0 = 15000*

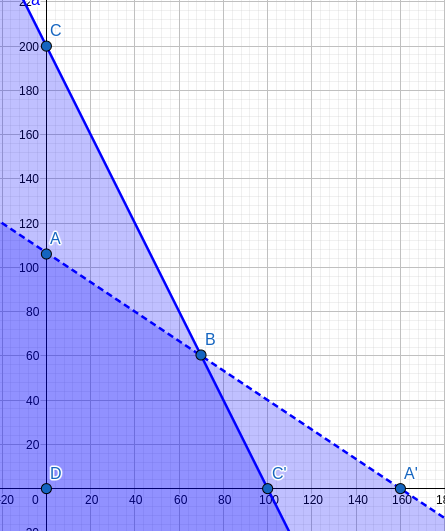
*150\*x1 = 15000*

*x1 = 15000/150*

*x1 = 100*

*C’=(100,0)*

3º passo é determinar o espaço de soluções viáveis no eixo cartesiano



4º passo é determinar o ponto ‘B’ que é a interseção entre as duas retas que representão as restrições:

*90\*x1+135\*x2 = 14400*

*150\*x1 + 75\*x2 =15000 \*(-1,8)*

*90\*x1 +135\*x2 = 14400*

*-270\*x1 -135\*x2 = -27000*

*-180\*x1 = -12600*

*x1 = 70*

*90\*70+135\*x2 = 14400*

*x2 =8100/135*

*x2=60*

*B = (70,60)*

5º passo é determinar a solução ótima do modelo

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Label | Ponto | Função Objetiva |
| D | (0,0) | 0 |
| C’ | (100,0) | 20000 |
| B | (70,60) | 21500 |
| A | (0, 960/9) | 13333.33... |

A melhor solução para o sistema é x1=70 e x2=60 que resulta num lucro de R$28000,00

Anexo II

Resolução da 7º instância foi feita pelo método Simplex Tableau seguindos os seguintes passos:

1º passo é converte o problema na forma padrão:

*max z = 250\*x1+175x2 – 50\*(x1+x2)*

*90\*x1+135\*x2 +x3 = 14400*

150\*x1 + 75\*x2 +x4 = 15000

2º passo é representar o problema em um quadro

(tableau) Simplex, cabe ressaltar que os coeficientes da função objetiva são invertidos quqando se insere na tabela para se adequar ao método

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | x1 | x2 | x3 | x4 |
| z | 0 | -200 | -125 | 0 | 0 |
| x3 | *14400* | 90 | 135 | 1 | 0 |
| x4 | 10000 | 150 | 75 | 0 | 1 |

3º passo é identificar a coluna pivo que é a coluna que possui a celula com o menor valor negativo na primeira linha da tabela:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | x1 | x2 | x3 | x4 |
| z | 0 | -200 | -125 | 0 | 0 |
| x3 | *14400* | 90 | 135 | 1 | 0 |
| x4 | 10000 | 150 | 75 | 0 | 1 |

4º passo é identificar a linha pivo,ou seja, a linha que possui o menor cofiente positivo da primeira coluna dividido pelo valor da mesma linha porem na coluna pivo

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | x1 | x2 | x3 | x4 | razão |
| z | 0 | -200 | -125 | 0 | 0 |  |
| x3 | *14400* | 90 | 135 | 1 | 0 | 160 |
| x4 | 10000 | 150 | 75 | 0 | 1 | 66,66 |

5º passo é fazer o escalonamento por Gauss-Jordan tendo como referencia a linha pivo com o valor da celula da interseção linha e coluna pivo com valor igual a 1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x4 | 66,66... | 1 | 0,5 | 0 | 0,01 |

Tendo a linha de referência basta escalonar a tabela e alterar a variavel da coluna pivo pela a variavel da linha pivo.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | x4 | x2 | x3 | x4 |
| z | 13333,33 | 0 | -25 | 0 | 1,33 |
| x3 | 8400 | 0 | 90 | 1 | -0,6 |
| x1 | 66,67 | 1 | 0,5 | 0 | 0,01 |

6º Verificar se ainda há um valor negativo na primeira linha e repetir os passos 3 a 6:

2 iteração

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | x4 | x2 | x3 | x4 |
| z | 13333,33 | 0 | -25 | 0 | 1,33 |
| x3 | 8400 | 0 | 90 | 1 | -0,6 |
| x1 | 66,67 | 1 | 0,5 | 0 | 0,01 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | x4 | x2 | x3 | x4 | Razão |
| z | 20000 | 0 | -25 | 0 | 1,33 |  |
| x3 | 5400 | 0 | 90 | 1 | -0,6 | 93,33 |
| x1 | 100 | 1 | 0,5 | 0 | 0,01 | 133,3 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x3 | 93,33 | 0 | 1 | 0,01 | -0,01 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | x4 | x3 | x3 | x4 |
| z | 15666,67 | 0 | 0 | 0,28 | 1,17 |
| x2 | 93,33 | 0 | 1 | 0,01 | -0,01 |
| x1 | 20 | 1 | 0 | -0,01 | 0,01 |

Antes de começar a 3° iteração verificasse que não existe nenhum número negativo da primeira linha da tabela portanto chegou ao resultado otimo .